



TITLE:

Micro-Microlocal Analysisの基礎 (代数解析学の最近の発展)

AUTHOR(S):

柏原, 正樹; 河合, 隆裕

CITATION:

柏原, 正樹 ...[et al]. Micro-Microlocal Analysisの基礎 (代数解析学の最近の発展). 数理解析研究所講究録 1979, 361: 106-115

ISSUE DATE:

1979-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104539>

RIGHT:

Micro-microlocal analysis の基礎

京大 教 研

柏原正樹

河合隆裕

正則パラメータを持つ超函数の性質は極めて正常で、特に病理現象は少ない。しかしながら、正則パラメータを持つ microfunction の扱いには注意を要する。(たとえば、正則パラメータに関して境界値を取ったものが microfunction になるとは限らない。実際 $(1/(x_2 - ix_1^2)) \chi(x_2)$ は、

$C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{x_2=0\}) \cap C^2(\{x_2 \neq 0\})$ の元を定め、特に、 $\text{Im } x_1 > 0$ で χ は $(x_1$ について正則に依存する) well-defined な microfunction であり、しかも

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \left(\frac{1}{x_2 - ix_1^2} \chi(x_2)\right) = -\frac{2\delta(x_2)}{x_1}$$

を満たすけれども、その境界値は microfunction にはならない。もし、違ったとすれば、Lewy-溝烟型の方程式、 $(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}) u = 0$ が $(0, i dx_2 \infty)$ で基本解を持つことになってしまふからである。) しかも、正則性の伝播、方程式の可解性等と関係して重要なのは、正則パラメータを持つ超函数よりむしろ microfunction であり、その組織的な取扱い方法が開発できれば、線型微分方程式論に一つの新しい視点を与えることになると思われる。実際、Bony, Schapira 等が提唱した micro-microlocal analysis はその一つの試みであった。彼等は、パラメータの正則性に注目して、その部分に

関し、正則函数から microfunction を得るのと同様の手法により、microfunction を更に microlocalize することをその出発点とした。この方向に沿って、Laurent は、更に進めて、函数についてのみならず、作用素についても S-K-K の議論と同様にして 超・超局所化が可能であることを指摘した。

本報告では、擬微分方程式の解の漸近展開への応用を目標としつつ、超・超局所解析の基礎付けを行う。尚、以下で (†) と付けた陳述の証明はまだ完全ではない。

以下、 M を n 次元実解析的多様体、 X をその複素化とする。 Λ を T^*X 内の Lagrange 多様体であって $\Lambda|_{\text{def}} = \Lambda \cap \sqrt{-1}T^*M$ も実 Lagrange 多様体になるものとし、 \mathcal{M} を Λ に付与した単純極大過剰決定系とする。 $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^*$ と定めれば \mathcal{N} は $\mathcal{E}_{X \times X}$ -加群として \mathcal{M} の取り方にはよらない。ここで

$$\Delta^a = \{ (x, y; \xi, \eta) \in T^*(X \times X) ; x = y, \xi = -\eta \}$$

$$\widetilde{\Delta^a(\Lambda \times \Lambda^a)^*} = (\Lambda \times \Lambda^a - \Delta^a) \cup T_{\Delta^a}^*(\Lambda \times \Lambda^a)$$

と定め、 $\widetilde{\Delta^a(\Lambda \times \Lambda^a)^*}$ から $\Lambda \times \Lambda^a$ への写像を π と記す。

又、 $T^*(\Lambda \times \Lambda^a) - T_{\Lambda \times \Lambda^a}^*(\Lambda \times \Lambda^a) \rightarrow P^*(\Lambda \times \Lambda^a)$ なる規則的写像を γ と記す。

以上の記号の準備の後に、我々は次のような層を考える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{D}}_{\Lambda}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{\Delta^a}^n(\mathcal{H}^{\infty}) \\ \tilde{\mathcal{E}}_{\Lambda}^{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{T_{\Delta^a}^*(\Lambda \times \Lambda^a)}^n (\pi^{-1} \mathcal{H}^{\infty})^a \\ \tilde{\mathcal{E}}_{\Lambda}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{-1} \gamma_* \tilde{\mathcal{E}}_{\Lambda}^{\mathbb{R}} \end{array} \right.$$

以下の議論から判るように、これから、超・超局所解析において \mathcal{D}^{∞} , $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$, \mathcal{E}^{∞} に各々対応する層となっている。具体的計算に用いる為に、 $\tilde{\mathcal{D}}_{\Lambda}^{\infty}$ 及び $\tilde{\mathcal{E}}_{\Lambda}^{\infty}$ の元に対応する表象の構造を調べておこう。定理1においては $\Lambda = T_{\{0\}}^* \mathbb{C}^n$ とする。

定理1 (i) $P \in \tilde{\mathcal{D}}_{\Lambda}^{\infty}(\Omega)$ ($\Omega \subset \Lambda \cong \mathbb{C}_{\xi}^n$) は、次の条件 (1) ~ (3) を満たす $p_{ij}(x, \xi)$ を用いて $P = \sum_{j \geq 0} p_{ij}(x, D)$ と表示され、 x , ξ 遂に成立する。

(1) p_{ij} は x について i 次有次多項式, ξ について j 次有次となる Ω での正則函数。

(2) 任意の $K \subset \mathbb{C}_x^n \times \Omega$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $C_{\varepsilon, K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leq \frac{C_{\varepsilon, K}}{j!} \varepsilon^j \quad (j \geq i).$$

(3) 同様に ある $R_{\varepsilon, K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leq \frac{(i-j)!}{j!} R_{\varepsilon, K}^{\varepsilon^{i-j}} \varepsilon^i \quad (j < i).$$

$$(ii)^{(4)} \quad P \in \hat{E}_\Lambda^\infty(U) \quad (U \subset T^*\Lambda \cong T_\Lambda(T^*X) \cong \mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_\xi^n)$$

は、次の条件 (1') ~ (3') 及び (4), (5) を満たす $p_{ij}(x, \xi)$ を用いて $P = \sum p_{ij}(x, D)$ と表示され、逆も成立する。

(1') p_{ij} は x について i 次斉次, ξ について j 次斉次となる U での正則函数。

(2') 任意の $K \in U$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $C_{\varepsilon, K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leq \frac{C_{\varepsilon, K}}{j!} \varepsilon^j \quad (j \geq i \geq 0).$$

(3') 同様に ある $R_{\varepsilon, K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leq \frac{(i-j)!}{j!} R_{\varepsilon, K}^{\varepsilon^{i-j}} \varepsilon^i \quad (j < i, i \geq 0).$$

(4) 任意の $K \in U$ に対してある R_K が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leq (-j)! R_K^{-j} \quad (j < i < 0).$$

(5) 任意の $K \in U$ に対してある R_K が存在し、更に任意の $\varepsilon > 0$ に対して $C_{\varepsilon, K}$ が存在して

$$\sup_K |p_{ij}| \leq \frac{(-i)!}{(j-i)!} C_{\varepsilon, K} \varepsilon^{j-i} R_K^{-i} \quad (j \geq i, i < 0).$$

注意 1. $\mathcal{E}_X^\infty|_\Lambda \subset \tilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ が成り立ち, その具体的対応は, $\mathcal{E} \ni P = \sum_j p_j(x, D)$ に対して, $p_{ij}(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} (p_j(x, \xi))$ の x について i 次斉次な部分) と定めることにより与えられる。

注意 2. $T^*\Lambda \cong T_\Lambda(T^*X)$ なる (Hamiltonian を用いた) 同一視は, 以下においてしばしば用いる。

注意 3. $\Lambda = \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{C}^n; x_1 = \dots = x_\ell = 0, \xi_{\ell+1} = \dots = \xi_m = 0\}$ の場合には, " $p_{ij}(x, \xi)$ は $(x_1, \dots, x_\ell, \xi_{\ell+1}, \dots, \xi_m)$ について i 次斉次, ξ について j 次斉次", とすれば "定理 1 と同様の結果が成立する。

$\tilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ 及び $\tilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ が自然な結合により環の層となることは, \mathcal{E}^∞ 及び \mathcal{E}^∞ の場合 とほぼ同様にして確かめ得る。次に, これ等の作用する層を構成しよう。以下, $\widehat{\Lambda^{\mathbb{R}} \Lambda^*} \rightarrow \Lambda$ なる写像を π と記す。又, $\mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M}$ を $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$ と記す。

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{B}}_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{\Lambda^{\mathbb{R}}}^n(\mathcal{M}^{\mathbb{R}}) \\ \tilde{\mathcal{C}}_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{T_{\Lambda^{\mathbb{R}}}^* \Lambda}^n(\pi^{-1} \mathcal{M}^{\mathbb{R}})^a \end{cases}$$

この時, 次の事実が成立する。

定理 2. (i) $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$ 及び \mathcal{M}^∞ はいずれも $\tilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ -加群。

(ii) $\tilde{\mathcal{B}}_\Lambda$ は $\tilde{\mathcal{D}}_\Lambda^\infty$ -加群。

(iii) $\tilde{\mathcal{C}}_\Lambda$ は $\tilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ -加群。

(iv) $0 \rightarrow \mathcal{M}^\mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_\Lambda \rightarrow \pi_* \tilde{\mathcal{C}}_\Lambda \rightarrow 0$ 。

(v) $\mathcal{C}_M|_\Lambda \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_\Lambda$ なる \mathcal{E}_x^∞ -準同型写像が存在する。(この写像は $\text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) = \mathbb{C}_\Lambda$ の non-zero section の取り方に依存する。)

(iv), (v) により microfunction の micro-micro-analyticity を考えることができる。又, (ii), (v) を用いて "microfunction の (Λ に関する) 漸近展開" と云う表現に, 次のようにして明快な意味を与えることができる。

例えば $\Lambda = T_Y^* X$ ($Y = \{(x_1, x') \in X \subset \mathbb{C}^n; x_1 = 0\}$) の場合に話を進めてみよう。この時次の方程式 (6) の microfunction 解 u の漸近展開を考える。

$$(6) \quad \mathcal{L}(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}) u = P u$$

(ここで $\mathcal{L}(\lambda)$ は m 次多項式, $\text{ord } P \leq m$ かつ $P \in \mathcal{E}_\Lambda(-1)$ とする。)

(確定特異点型の極大過剰決定系の断面 u に対しては, それが必要 (6) の形の方程式を満たすことを示し得る。)

この時, 次の定理 3 を示すことができる。以下簡単の為,

$b(\lambda)=0$ の根 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ に対して $\lambda_i - \lambda_{i'} \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq i'$) を仮定する。

定理 3. 方程式 (6) は $\tilde{\mathcal{G}}_\Lambda^\infty$ -加群として, 次の方程式 (7) に同型である。

$$(7) \quad b(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}) \tilde{u} = 0$$

定理 2(ii) とこの定理を合わせれば, (6) の解 u が $\sum_{i=1}^m Q_i ((x_1 + i0)^{\lambda_i} \mu_i(x'))$ ($Q_i \in \tilde{\mathcal{G}}_\Lambda^\infty$, $\mu_i(x') \in B_{\mathbb{R}^{n-1}}$) とする展開を $\tilde{\mathcal{B}}_\Lambda$ で持つことが判る。

尚, 定理 3 の証明において, 実は, $\tilde{\mathcal{G}}_\Lambda$ と呼ぶべき, $\tilde{\mathcal{G}}_\Lambda^\infty$ より狭いクラスの作用素によって (6) と (7) の同型を与えることが出来る。その事実を用いれば, いくつかの "比較定理" ($C_{Y|X}$ -解と $\hat{C}_{Y|X}$ -解の間の, etc.) を与えることもできる。

次に $\tilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ における作用素の可逆性について考察する。

定理 4. $P \in \tilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ が $p^* \in T^*\Lambda \simeq T_\Lambda(T^*X)$ において次の条件 (8), (9) を, ある $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対して満たすならば, P は p^* で可逆である。

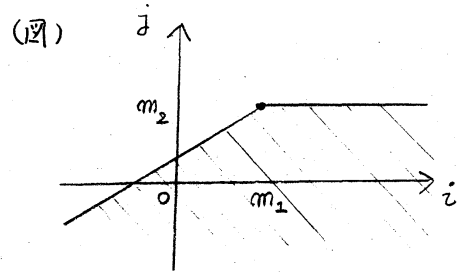
(8) ある $c > 0$ があって

$$p_{ij} = 0 \quad (j > c(i - m_1) + m_2)$$

$$(9) \quad p_{ij} = 0 \quad (j > m_2)$$

かつ

$$p_{m_1, m_2} (p^*) \neq 0$$



(斜線部以外の (i, j)
に対して $p_{ij} = 0$)

この結果を用いて \mathcal{E}_X -加群 \mathcal{M} の $\tilde{\mathcal{E}}_\Lambda^\infty$ -加群としての構造を調べよう。まず, $\mathcal{I}_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathcal{E}_X(1); \sigma(P)|_\Lambda = 0\}$, $J_\Lambda(1) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{O}_{T^*X}(1); f|_\Lambda = 0\}$ と定め, 更に,

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_k (\mathcal{I}_\Lambda^k / (\mathcal{I}_\Lambda^{k-1} + \mathcal{I}_\Lambda^{k+1}(-1))) \quad (= \bigoplus_k J_\Lambda(1)^k / J_\Lambda(1)^{k-1} \mathcal{O}_{T^*X}(1))$$

と定義する。次に導入する $T_\Lambda(T^*X)$ の部分集合 $Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ は 将来 \mathcal{M} の Levi 条件を考察する際, 重要な役割を果たすものと思われる。

\mathcal{L} を \mathcal{M} の連接的 $\mathcal{E}(0)$ -部分加群であって $\mathcal{M} = \mathcal{E}\mathcal{L}$ なるものとする。この時,

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{supp} \left(\mathcal{O}_{T_\Lambda(T^*X)} \otimes_A \left(\bigoplus_k (\mathcal{I}_\Lambda^k \mathcal{L} / (\mathcal{I}_\Lambda^{k-1} \mathcal{L} + \mathcal{I}_\Lambda^{k+1}(-1) \mathcal{L})) \right) \right)$$

と定める。(これは \mathcal{L} の取り方によらない。)

注意 1. $T_\Lambda(T^*X) \simeq T^*\Lambda$ なる同-視の下で, $Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ は $T^*\Lambda$ の包含的部分集合になると予想する。

注意 2. $\mathcal{M} = \mathcal{E}/\mathcal{I}$ の時,

$$Ch_{\Lambda}(\mathcal{M}) = \bigoplus_k A / (\tilde{\sigma}_k (j_{\Lambda}^k \cap \mathcal{I}))$$

が成立する。但し、ここで $\tilde{\sigma}_k$ とは、 $j_{\Lambda}^k / (j_{\Lambda}^{k-1} + j_{\Lambda}^{k+1}(-1)) \simeq J_{\Lambda}(1)^k / J_{\Lambda}(1)^{k-1} \otimes_{T^*X}(1)$ なる同型を用いて定義される、 j_{Λ}^k から、 $T_{\Lambda}(T^*X)$ 上の k 次斉次式のつくる層 $J_{\Lambda}(1)^k / J_{\Lambda}(1)^{k-1} \otimes_{T^*X}(1)$ への準同型写像である。

定理4と上の注意2を合わせて次の定理を得る。

$$\text{定理5. } Ch_{\Lambda}(\mathcal{M}) \supset \text{Supp}(\hat{E}_{\Lambda}^{\infty} \otimes \mathcal{M}|_{\Lambda})$$

尚、定理4から、より精密に

$$(10) \quad C_{\Lambda}(\text{Supp } \mathcal{M}) \supset \text{Supp}(\hat{E}_{\Lambda}^{\infty} \otimes \mathcal{M}|_{\Lambda})$$

を得ることもできる。(ここで C_{Λ} は Λ に沿った normal cone であり、 $Ch_{\Lambda}(\mathcal{M}) \supset C_{\Lambda}(\text{Supp } \mathcal{M})$ を示すことができる。)

注意. (10)において等号が成り立つと予想する。

最後に、Laurent によって考察された作用素の超・超局所化と本報告で論じた作用素の関係について一言する。

今、 V を T^*X 内の余次元 $d (< m)$ の正則包合的

部分多様体とある。ここで $\Delta^a \cap V \times V^a$ を通る $V \times V^a$ の
 陪特性帯の全体は Lagrange 多様体 \tilde{V} を定める。そこ
 で \tilde{V} に台を持つ単純極大過剰決定系 π を用いて

$\mathcal{H}_{T_{\Delta^a}^* \tilde{V}}^d(\pi^{-1}\pi^\infty)$ を考えると、これが Laurent によって考

察された作用素の空間を与える。ここで $d=91$ とした
 極限的な場合が本講で論じた $\hat{\mathcal{E}}_1^\infty$ となる。

議論の詳細及び文献については、現在準備中の
 論文に譲る。